

Hong Kong Mathematics Olympiad (2000 – 2001)

Heat Event (Individual)

香港數學競賽 (2000 – 2001)

初賽項目(個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

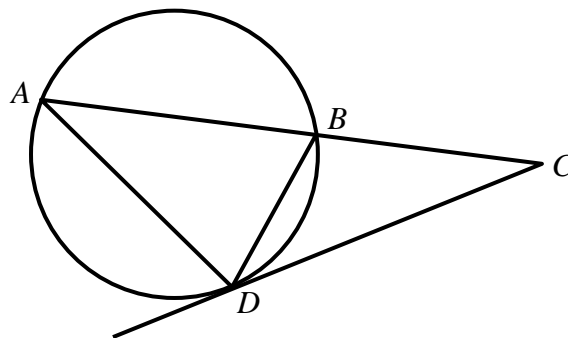
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 設 $4^a = 25^b = 10$ ，求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值。

If $4^a = 25^b = 10$ ，find the value of $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

2. 在圖一， ABC 為一直線， $AB = AD$ ， $\angle BDC = 38^\circ$ ， CD 切圓 ABD 於 D 。設 $\angle BCD = x^\circ$ ，求 x 的值。

In Figure 1, ABC is a straight line, $AB = AD$, $\angle BDC = 38^\circ$, CD is a tangent to the circle ABD . Let $\angle BCD = x^\circ$, find the value of x .



圖一

Figure 1

3. 如果 $p = 10x - 4xy - 5x^2 - y^2 - 8$ ，其中 x 和 y 為實數，求 p 的最大值。

If $p = 10x - 4xy - 5x^2 - y^2 - 8$ where x and y are real numbers, find the largest value of p .

4. 如果下列三條直線相交於一點，求 c 的值。

$$L_1: 6x + 6y - 19 = 0$$

$$L_2: 18x + 12y + c = 0$$

$$L_3: 2x + 3y - 8 = 0$$

If the following three straight lines intersect at one point, find the value of c .

$$L_1: 6x + 6y - 19 = 0$$

$$L_2: 18x + 12y + c = 0$$

$$L_3: 2x + 3y - 8 = 0$$

5. 已知 $2 - 6\cos^2\theta = 7\sin\theta\cos\theta$ ，求 $\tan\theta$ 的最大值。

It is known that $2 - 6\cos^2\theta = 7\sin\theta\cos\theta$, find the largest value of $\tan\theta$.

6. 88 張成人車票總值為 \$ _293_ \$，由於列印機壞了，五位數字的首尾兩個數字印不出來。已知每張車票的價值為 \$ P \$，其中 P 為一整數，求 P 的值。

The total cost for 88 adult tickets was \$ _293_ \$. Because the printing machine was not functioning well, the first and the last digits of the 5-digit number were missing. If the cost for each ticket is \$ P , where P is an integer, find the value of P .

7. 如果 p 為方程式 $2x^3 + 7x^2 - 29x - 70 = 0$ 的正實數根，求 p 的值。

If p is the positive real root of $2x^3 + 7x^2 - 29x - 70 = 0$, find the value of p .

8. 甲、乙二人合作做一件工程，30 天便可完工。如果兩人只合作了 6 天，甲便退出，乙須獨自繼續做 40 天才能完工。如果甲每天完成工程的 $\frac{1}{q}$ ，求 q 的數值。

Two persons A , B can complete a task in 30 days when they work together. If they work together for 6 days and then A quits, B needs 40 more days in order to complete the task. If the proportion of the task A can finish each day is $\frac{1}{q}$, find the value of q .

9. 設 a 、 b 、 c 為三個相異常數。已知

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)} \equiv \frac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)},$$

其中 p 、 q 、 r 為常數，且 $s=7p+8q+9r$ ，求 s 的值。

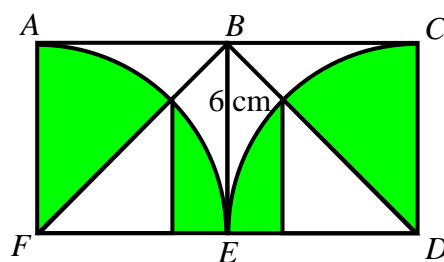
Let a , b , c be three distinct constants. It is given that

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)} \equiv \frac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)},$$

where p , q , r are constants, and $s=7p+8q+9r$, find the value of s .

10. 如圖二， $ABEF$ 、 $BCDE$ 為正方形， $BE=6$ cm， \widehat{AE} 及 \widehat{CE} 是分別以 F 、 D 為圓心畫出來的弧。如果圖中陰影部分的總面積為 S cm²，求 S 的數值。(取 $\pi=3$)

In Figure 2, $ABEF$, $BCDE$ are two squares, $BE=6$ cm, and \widehat{AE} and \widehat{CE} are arcs drawn with centres F and D respectively. If the total area of the shaded part is S cm², find the value of S . (Assume $\pi=3$)



圖二

Figure 2